UNIVERSITATEA BABEŞ-BOLYAI
FACULTATEA DE MATEMATICĂ ŞI INFORMATICĂ

Admitere Mate-Info - model

Proba scrisă la Informatică

În atenția concurenților:

1. Se consideră că indexarea șirurilor începe de la 1.
2. Problemele tip grilă (Partea A) pot avea unul sau mai multe răspunsuri corecte. Răspunsurile trebuie scrise de candidat pe foaia de concurs (nu pe foaia cu enunțuri). Obținerea punctajului aferent problemei este condiționată de identificarea tuturor variantelor de răspuns corecte și numai a acestora.
3. Pentru problemele din Partea B se cer rezolvări complete pe foaia de concurs.
   - **a.** Rezolvările se vor scrie în *pseudocod* sau *într-un limbaj de programare* (*Pascal/C/C++).*
   - **b.** Primul criteriu în evaluarea rezolvărilor va fi ***corectitudinea*** algoritmului, iar apoi ***performanța*** din punct de vedere al *timpului de executare* și al *spațiului de memorie utilizat*.
   - **c.** ***Este obligatorie descrierea și justificarea*** (sub) algoritmilor înaintea rezolvărilor. Se vor scrie, de asemenea, ***comentarii*** pentru a ușura înțelegerea detaliilor tehnice ale soluției date, a semnificației identificatorilor, a structurilor de date folosite etc. Neîndeplinirea acestor cerințe duce la pierderea a 10% din punctajul aferent subiectului.
   - **d.** Nu se vor folosi funcții sau biblioteci predefinite (de exemplu: *STL*, funcții predefinite pe șiruri de caractere).

Partea A (60 puncte)

A.1. Oare ce face? (6 puncte)

Subalgoritmul `generare(n)` prelucrează un număr natural ***n*** ($0 < n < 100$).

```
Subalgoritm generare(n):
    nr ← 0
    Pentru i ← 1, 1801 execută
       folosit_i ← fals
    SfPentru
    CâtTimp nu folosit_n execută
       suma ← 0, folosit_n ← adevărat
       CâtTimp (n ≠ 0) execută
          cifra ← n MOD 10, n ← n DIV 10
          suma ← suma + cifra * cifra * cifra
       SfCâtTimp
       n ← suma, nr ← nr + 1
    SfCâtTimp
    returnează nr
SfSubalgoritm
```

Precizați care este efectul acestui subalgoritm.

A. calculează, în mod repetat, suma cuburilor cifrelor numărului ***n*** până când suma egalează numărul ***n*** și returnează numărul repetărilor efectuate
B. calculează suma cuburilor cifrelor numărului ***n*** și returnează această sumă
C. calculează suma cuburilor cifrelor numărului ***n***, înlocuiește numărul ***n*** cu suma obținută și returnează această sumă
D. calculează numărul înlocuirilor lui ***n*** cu suma cuburilor cifrelor sale până când se obține o valoare calculată anterior sau numărul însuși și returnează acest număr

A.2. Ce valori sunt necesare? (6 puncte)

Se consideră subalgoritmul `prelucreaza(v, k)`, unde ***v*** este un șir cu ***k*** numere naturale ($1 \le k \le 1\,000$).

```
Subalgoritm prelucreaza(v, k)
    i ← 1, n ← 0
    CâtTimp i ≤ k și v_i ≠ 0 execută
       y ← v_i, c ← 0
       CâtTimp y > 0 execută
          Dacă y MOD 10 > c atunci
             c ← y MOD 10
          SfDacă
          y ← y DIV 10
       SfCâtTimp
       n ← n * 10 + c
       i ← i + 1
    SfCâtTimp
    returnează n
SfSubalgoritm
```

Precizați pentru care valori ale lui ***v*** și **k** subalgoritmul returnează valoarea 928.

A. ***v*** = (194, 121, 782, 0) și ***k*** = 4

B. $v = (928)$ și $k = 1$
C. $v = (9, 2, 8, 0)$ și $k = 4$
D. $v = (8, 2, 9)$ și $k = 3$

A.3. Evaluare logică (6 puncte)

Fie s un șir cu k elemente de tip boolean și subalgoritmul `evaluare(s, k, i)`, unde k și i sunt numere naturale ($0 \leq i \leq k \leq 100$).

```
Subalgoritm evaluare(s, k, i)
   Dacă i ≤ k atunci
      Dacă s_i atunci
         returnează s_i
      altfel
         returnează (s_i sau evaluare(s, k, i + 1))
      SfDacă
   altfel
      returnează fals
   SfDacă
SfSubalgoritm
```

Precizați de câte ori se autoapelează subalgoritmul `evaluare(s, k, i)` în urma execuțieiurmătoarei secvențe de instrucțiuni:

```
s ← (fals, fals, fals, fals, fals, fals, adevărat, fals, fals, fals)
k ← 10, i ← 3
evaluare(s, k, i)
```

A. de 3 ori
B. de același număr de ori ca în următoarea secvență de instrucțiuni

```
s ← (fals, fals, fals, fals, fals, fals, fals, adevărat)
k ← 8, i ← 4
evaluare(s, k, i)
```

C. de 6 ori
D. niciodată

A.4. Reuniune (6 puncte)

Se consideră dat subalgoritmul `aparține(x, a, n)` care verifică dacă un număr natural x aparține mulțimii a cu n elemente; a este un șir cu n elemente și reprezintă o mulțime de numere naturale ($1 \leq n \leq 200$, $1 \leq x \leq 1000$).

Fie subalgoritmii `reuniune(a, n, b, m, c, p)` și `calcul(a, n, b, m, c, p)`, descriși mai jos, unde a, b și c sunt șiruri care reprezintă mulțimi de numere naturale cu n, m și respectiv p elemente ($1 \leq n \leq 200$, $1 \leq m \leq 200$, $1 \leq p \leq 400$). Parametrii de intrare sunt a, n, b, m și p, iar parametrii de ieșire sunt c și p.

```
1.      Subalgoritm reuniune(a, n, b, m, c, p):
2.        Dacă n = 0 atunci
3.          Pentru i ← 1, m execută
4.            p ← p + 1, c_p ← b_i
5.          SfPentru
6.        altfel
7.          Dacă nu aparține(a_n, b, m) atunci
8.            p ← p + 1, c_p ← a_n
9.          SfDacă
10.         reuniune(a, n - 1, b, m, c, p)
11.       SfDacă
12.     SfSubalgoritm
```

```
1.  Subalgoritm calcul(a, n, b, m, c, p):
2.      p ← 0
3.      reuniune(a, n, b, m, c, p)
4.  SfSubalgoritm
```

Precizați care dintre afirmațiile de mai jos sunt întotdeauna adevărate:

A. când mulțimea a conține un singur element, apelul subalgoritmului `calcul(a, n, b, m, c, p)` provoacă apariția unui ciclu infinit
B. când mulțimea a conține 4 elemente, apelul subalgoritmului `calcul(a, n, b, m, c, p)` provoacă executarea instrucțiunii de pe linia 10 a subalgoritmului `reuniune` de 4 ori
C. când mulțimea a conține 5 elemente, apelul subalgoritmului `calcul(a, n, b, m, c, p)` provoacă executarea instrucțiunii de pe linia 2 a subalgoritmului `reuniune` de 5 ori
D. când mulțimea a are aceleași elemente ca și mulțimea b, în urma execuției subalgoritmului `calcul(a, n, b, m, c, p)` mulțimea c va avea același număr de elemente ca și mulțimea a

A.5. Exponențiere (6 puncte)

Care dintre următorii algoritmi calculează corect valoarea a^b, a și b fiind două numere naturale ($1 \leq a \leq 11$, $0 \leq b \leq 11$).

A.	B.
`Subalgoritm expo(a, b):` `  rezultat ← 1`	`Subalgoritm expo(a, b):` `  Dacă b ≠ 0 atunci`

	CâtTimp b > 0 **execută**
	  Dacă b **MOD** 2 = 1 **atunci**
	  rezultat ← rezultat * a
	  SfDacă
	  b ← b **DIV** 2
	  a ← a * a
	  SfCâtTimp
	  returnează rezultat
	SfSubalgoritm
			Dacă b **MOD** 2 = 1 **atunci**
			  returnează expo(a * a, b / 2) * a
			  altfel
			  returnează expo(a * a, b / 2)
			  SfDacă
			altfel
			  returnează 1
			SfDacă
			SfSubalgoritm

C.	**Subalgoritm** expo(a, b):
	  rezultat ← 1
	  CâtTimp b > 0 **execută**
	  rezultat ← rezultat * a
	  b ← b - 1
	  SfCâtTimp
	  returnează rezultat
	SfSubalgoritm
		D.	**Subalgoritm** expo(a, b):
			  Dacă b = 0 **atunci**
			  returnează 1
			  SfDacă
			  returnează a * expo(a, b - 1)
			SfSubalgoritm

A.6. Cel mai mare multiplu (6 puncte)

Care dintre subalgoritmii de mai jos returnează cel mai mare multiplu al numărului natural ***a***, multiplu care este mai mic sau egal cu numărul natural ***b*** ($0 < a < 10\,000$, $0 < b < 10\,000$, $a < b$)?

A.	**Subalgoritm** f(a, b):
	  c ← b
	  CâtTimp c **MOD** a = 0 **execută**
	  c ← c – 1
	  SfCâtTimp
	  returnează c
	SfSubalgoritm
		B.	**Subalgoritm** f(a, b):
			  Dacă a < b **atunci**
			  returnează f(2 * a, b)
			  altfel
			  Dacă a = b **atunci**
			  returnează a
			  altfel
			  returnează b
			  SfDacă
			  SfDacă
			SfSubalgoritm

C.	**Subalgoritm** f(a, b): **returnează** (b **DIV** a) * a **SfSubalgoritm**		

D.	**Subalgoritm** f(a, b):
	  Dacă b **MOD** a = 0 **atunci**
	  returnează b
	  SfDacă
	  returnează f(a, b - 1)
	SfSubalgoritm		

A.7. Tip de date (6 puncte)

Un tip de date întreg reprezentat pe ***x*** biți (***x*** este număr natural strict pozitiv) va putea reține valori întregi din:

A. $[0, 2^x]$
B. $[0, 2^{x-1}-1]$
C. $[-2^{x-1}, 2^{x-1}-1]$
D. $[-2^x, 2^x-1]$

A.8. Număr apeluri (6 puncte)

Se dă subalgoritmul f(a, b):

```
Subalgoritm f(a, b):
      Dacă a > 1 atunci
            returnează b * f(a - 1, b)
      altfel
            returnează b * f(a + 1, b)
      SfDacă
SfSubalgoritm
```

Precizați de câte ori se auto apelează subalgoritmul f(a, b) în urma execuției următoarei secvențe de instrucțiuni:

```
a ← 4
b ← 3
c ← f(a, b)
```

A. de 4 ori
B. de 3 ori
C. de o infinitate de ori
D. niciodată

A.9. Șiruri (6 puncte)

Se consideră toate șirurile de lungime $l \in \{1, 2, 3\}$ formate din litere din mulțimea $\{a, b, c, d, e\}$. Câte dintre aceste șiruri au elementele ordonate strict descrescător și un număr impar de vocale? (*a* și *e* sunt vocale)

A. 14
B. 7
C. 81
D. 78

A.10. Numere pozitive (6 puncte)

Se dă subalgoritmul `numerePozitive(m, a, n, b)`.

```
void numerePozitive(int m,int a[], int &n,
int b[]){
    n = 0;
    for(int i = 1; i <= n; i++){
      if (a[i] > 0){
          n = n + 1;
          b[n] = a[i];
      }
    }
}
```

```
procedure numerePozitive(m:integer;
a:sir; var n:integer; var b:sir)
  begin
    n := 0;
    for i := 1 to n do
      if (a[i] > 0) then
        begin
          n := n + 1;
          b[n] := a[i];
        end;
 end;
```

Care este rezultatul execuției apelului `numerePozitive(k, x, p, y)` pentru $k = 4$, șirul x=(-1, 2, -3, 4), $p = -1$ și șirul vid $y = ()$.

A. $p = 3$ și $y = (2, 4)$;
B. $p = 0$ și $y = (2, 4)$;
C. $p = 0$ și $y = ()$;
D. Depinde de valoarea lui k.

<u>Partea B</u> (30 puncte)

B.1. Numere magice (15 puncte)

Se consideră două numere naturale p și q ($2 \le p \le 10$, $2 \le q \le 10$). Un număr natural se numește *magic* dacă mulțimea cifrelor utilizate în scrierea lui în sistemul de numerație având baza p este identică cu mulțimea cifrelor folosite în scrierea lui în sistemul de numerație având baza q. De exemplu, pentru $p = 9$ și $q = 7$, $(31)_{10}$ este număr *magic* pentru că $(34)_9 = (43)_7$, iar pentru $p = 3$ și $q = 9$, $(9)_{10}$ este număr *magic* pentru că $(100)_3 = (10)_9$. Se consideră și subalgoritmul `cifreBază(x, b, c)` pentru determinarea cifrelor numărului x în baza b (memorate în șirul c):

```
Subalgoritm cifreBază(x, b, c):
   CâtTimp x > 0 execută
      c[x MOD b] ← 1
      x ← x DIV b
   SfCâtTimp
SfSubalgoritm
```

Cerințe:

a. Scrieți o variantă *recursivă* (fără structuri repetitive) a subalgoritmului `cifreBază(x, b, c)` care are același antet și același efect cu acesta. (**5 puncte**)
b. Scrieți modelul matematic al variantei recursive a subalgoritmului `cifreBază(x, b, c)` (dezvoltat la punctul a). (**3 puncte**)
c. Scrieți un subalgoritm care, folosind subalgoritmul `cifreBază(x, b, c)`, pentru două baze p și q date determină șirul a al tuturor numerelor *magice* strict mai mari ca 0 și strict mai mici decât un număr natural n dat ($1 < n \le 10\,000$). Parametrii de intrare ai subalgoritmului sunt p și q (cele două baze) și valoarea n. Parametrii de ieșire vor fi șirul a și lungimea k a șirului a. (**7 puncte**)

Exemplu: dacă $p = 9$, $q = 7$ și $n = 500$, șirul a va avea $k = 11$ elemente: (1, 2, 3, 4, 5, 6, 31, 99, 198, 248, 297).

B.2. Degustare de ciocolată (15 puncte)

O companie de publicitate face reclamă la un nou sortiment de ciocolată și intenționează să distribuie mostre de ciocolată la n ($10 \leq n \leq 10\,000\,000$) copii care sunt așezați într-un cerc. Angajații companiei își dau seama că distribuirea de mostre tuturor copiilor ar costa foarte mult. În consecință, decid să distribuie mostre fiecărui al k-lea ($0 < k < n$) copil din cei n, numărând copiii din k în k (atunci când numărătoarea ajunge la ultimul copil, ea continuă cu primul copil și așa mai departe). În numărătoare se vor considera toți copiii, fie că au primit sau nu ciocolată. Numărătoarea *se oprește atunci când o ciocolată ar trebui distribuită unui copil care deja a primit.*

a. Cerințe:Precizați proprietatea pe care trebuie să o îndeplinească numerele de ordine ale copiilor care primesc ciocolată. Justificați răspunsul. (**3 puncte**)
b. Explicați (în limbaj natural și formule matematice) care este numărul de copii care primesc ciocolată? Justificați răspunsul. (**2 puncte**)
c. Scrieți un subalgoritm care determină numărul copiilor (***nr***) care nu primesc mostre de ciocolată. Parametrii de intrare sunt numerele naturale n și k, iar parametrul de ieșire va fi numărul natural ***nr***. (**10 puncte**)

Exemplu 1: dacă $n = 12$ și $k = 9$, atunci ***nr*** = 8 (primul, al 2-lea, al 4-lea, al 5-lea, al 7-lea, al 8-lea, al 10-lea, al 11-lea copil nu primesc ciocolată).
Exemplu 2: dacă $n = 15$ și $k = 7$, atunci ***nr*** = 0 (toți copiii primesc ciocolată).

Notă:

1. Toate subiectele sunt obligatorii.
2. Rezolvările trebuie scrise detaliat pe foile de examen (ciornele nu se iau în considerare).
3. Se acordă 10 puncte din oficiu.
4. Timpul efectiv de lucru este de 3 ore.

BAREM & REZOLVARE

OFICIU ..... **10 puncte**

Partea A ..... **60 puncte**

A. 1. Oare ce face? Răspuns: D ..... 6 puncte
A. 2. Ce valori sunt necesare? Răspuns: A, C ..... 6 puncte
A. 3. Evaluare logică. Răspuns: B ..... 6 puncte
A. 4 Reuniune. Răspuns: B, D ..... 6 puncte
A. 5. Exponențiere. Răspuns: A, B, C, D ..... 6 puncte
A. 6. Cel mai mare multiplu. Răspuns: C, D ..... 6 puncte
A. 7. Tip de date. Răspuns: B, C ..... 6 puncte
A. 8. Număr apeluri. Răspuns: C ..... 6 puncte
A. 9. Șiruri. Răspuns: A ..... 6 puncte
A. 10. Numere pozitive. Răspuns: C ..... 6 puncte

Partea B ..... **30 puncte**

B. 1. Numere magice ..... **15 puncte**

B.1.a. versiunea recursivă a subalgoritmului `cifreBază(x, b, c)` ..... **5 puncte**

– respectarea antetului ..... 1 punct
– condiție oprire recursivitate ..... 1 punct
– autoapel (logica, parametrii) ..... 2 puncte
– valori returnate ..... 1 punct

```
Subalgoritm cifreBază(x, b, c):
   Dacă x > 0 atunci
      c[x MOD b] ← 1
      cifreBază(x DIV b, b, c)
   SfDacă
SfSubalgoritm
```

B.1.b. modelul matematic pentru `cifreBază(x, b, c)` ..... **3 puncte**

$$cifreBaza(x,b,c) = \begin{cases} -, & dacă\ x = 0 \\ cifreBaza(x\ DIV\ b, b, c'), unde\ c'_{x\ MOD\ b} = 1, & altfel \end{cases}$$

B.1.c. subalgoritmul pentru construirea șirului a ..... **7 puncte**

– verificarea proprietății de *număr magic*
  - V1: pe baza identității vectorilor caracteristici ai mulțimilor de cifre ale numărului dat în cele două reprezentări (în baza ***p*** și, respectiv, baza ***q***) ..... 5 puncte

```
// se construieste vectorul de aparitii a cifrelor in baza p pentru un numar x
// se determina pe rand cifrele in baza q ale numarului x
//     daca cifra curenta nu apare in reprezentarea in baza p atunci numarul x
//               nu este magic
//     altfel se incrementeaza valoarea corespunzatoare cifrei in vectorul de
//               cifre
// daca in vectorul de cifre a ramas valoarea 1 pentru anumite cifre, acele
// cifre apar in reprezentarea in baza p si nu apar in reprezentarea in baza q,
// deci numarul nu este magic
bool nrMagic(int x, int p, int q){
        //verifica daca x este magic in raport cu bazele p si q
        int cifre[10] = { 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0 };
        cifreBaza(x, p, cifre);
        while (x != 0){     //determinam cifrele lui x in baza q
                int uc = x % q;
                if (cifre[uc] == 0)  //daca cifra curenta (in baza q) nu e
                                     //folosita in baza p
                        return false;
                cifre[uc]++;
                x = x / q;
        }
        for (int i = 0; i < 10; i++){
                if (cifre[i] == 1)   //daca cifra i e folosita in baza p, dar
                                     //nu e si in baza q
                        return false;
        }
        return true;
}
```

- V2: alte variante de algoritm corect cu performanță mai redusă ..... maxim 3 puncte

– construirea șirului ***a*** ..... 2 puncte

```
void sirNrMagice(int p, int q, int n, int &k, int sir[]){
        k = 0;
        for (int i = 1; i < n; i++){
                if (nrMagic(i, p, q))
                        sir[k++] = i;
        }
}
```

B. 2. Degustare de ciocolată ..... 15 puncte

B.2.a. Putem să considerăm numărătoarea în cerc ca o numărătoare liniară, în mai multe șiruri mici, fiecare cu ***n*** copii, obținând un șir mare cu ***p*** copii (***p*** fiind multiplu de ***n***). Numărătoarea se termină atunci când al ***n***-lea copil dintr-un șir mic primește ciocolată (astfel, următorul copil care ar trebui să primească ciocolată va fi un al ***k***-lea copil din următorul șir mic). De exemplu, dacă avem ***n*** = 12 copii și ***k*** = 9, formăm mai multe șiruri mici cu câte ***n*** copii:

Indice copil	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
Cu/fără ciocolată	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0

Indice șir mare	1	2	3	4	5	6	7	8	**9**	10	11	12
Indice copil	1	2	3	4	5	6	7	8	**9**	10	11	12
Cu/fără ciocolată	0	0	0	0	0	0	0	0	**1**	0	0	0

Indice șir mare	13	14	15	16	17	**18**	19	20	21	22	23	24
Indice copil	1	2	3	4	5	**6**	7	8	9	10	11	12
Cu/fără ciocolată	0	0	0	0	0	**1**	0	0	1	0	0	0

Indice șir mare	25	26	**27**	28	29	30	31	32	33	34	35	**36**
Indice copil	1	2	**3**	4	5	6	7	8	9	10	11	**12**
Cu/fără ciocolată	0	0	**1**	0	0	1	0	0	1	0	0	**1**

Aici se oprește împărțirea cicolăților pentru că următoarea ciocolată ar trebui dată unui copil care a primit deja ciocolată.

Indice șir mare	37	38	39	40	41	42	43	44	**45**	46	47	48
Indice copil	1	2	3	4	5	6	7	8	**9**	10	11	12
Cu/fără ciocolată	0	0	1	0	0	1	0	0	**1**	0	0	1

Copiii care primesc ciocolată sunt cei a căror număr de ordine în șirul mare este multiplu de ***k***. ..... **2 puncte**

B.2.b. Numărul de copii care primesc ciocolată: ***p*** trebuie sa fie și multiplu de ***k***. Așadar, ***p*** = cmmmc(***n***, ***k***). Dintre cei ***p*** copii, au primit ciocolată exact ***p*** / ***k*** copii, deci copiii fără ciocolată sunt în număr de: ***n*** - ***p*** / ***k*** = ***n*** - cmmmc(***n***, ***k***) / ***k*** = ***n*** - (***n*** * ***k*** / cmmdc(***n***, ***k***)) / ***k*** = ***n*** - ***n*** / cmmdc(***n***, ***k***)..... **3 puncte**

B.2.c. Dezvoltare subalgoritm ..... **10 puncte**

- V1: determinarea corectă a valorii ***nr*** (cu formula ***nr*** = ***n*** – ***n***/*cmmdc*(***n***, ***k***))..... 10 puncte

```
//calculeaza si returneaza cmmdc a 2 numere naturale a si b
int cmmdc(int a, int b){
        if ((a == b) && (a == 0))
                return 1;
        if (a * b == 0)
                return a + b;
        while (b != 0){
                int c = b;
                b = a % b;
                a = c;
        }       //while
        return a;
}

int degustareCiocolata(int n, int k){
        return n - n / cmmdc(n, k);
}
```

- V2: determinarea corectă a valorii ***nr*** (simulare, listă circulară) ..... 7 puncte

```
int ciocolata(int n, int k){
        const int MAXLEN = 10000000;
        bool ciocolata[MAXLEN];
        for (int i = 1; i <= n; i++)
                ciocolata[i] = false;
        int i = k;
        int nrCopiiFaraCiocolata = n;
        while (!ciocolata[i]){ //simulare lista circulara
                ciocolata[i] = true;
                nrCopiiFaraCiocolata--;
                i += k;
                if (i > n){
                        i -= n;
                }
        }
        return nrCopiiFaraCiocolata;
}
```