14 noiembrie 2020 Lect. dr. Mihai Iancu

Inducţie

Notaţii:
- $\mathbb{N} = \{0, 1, \ldots\}$ reprezintă mulţimea numerelor naturale.
- $\mathbb{N}^* = \{1, 2, \ldots\}$ reprezintă mulţimea numerelor naturale nenule.

Inducţie matematică (*în două versiuni*):

Fie $P(n)$ o propoziţie care depinde de $n \in \mathbb{N}$, $n \geq m$, unde $m \in \mathbb{N}$ este fixat. Demonstrăm că $P(n)$ e adevărată pentru orice $n \in \mathbb{N}$, $n \geq m$, prin inducţie matematică, verificând următorii paşi:

Versiunea I:
1) $P(m)$ e adevărată;
2) $\forall k \in \mathbb{N}, k \geq m : P(k)$ e adevărată $\implies$ $P(k+1)$ e adevărată.

Versiunea a II-a:
1) $P(m), \ldots, P(m+l-1)$ sunt adevărate, unde $l \in \mathbb{N}^*$ este fixat;
2) $\forall k \in \mathbb{N}, k \geq m : P(k)$ e adevărată $\implies$ $P(k+l)$ e adevărată.

Probleme

1. Fie $(F_n)_{n\in\mathbb{N}}$ şirul lui Fibonacci: $F_0 = 0$, $F_1 = 1$, $F_{n+1} = F_n + F_{n-1}$, $n \in \mathbb{N}^*$.
Demonstraţi că $\forall n \in \mathbb{N}^* : \begin{pmatrix} F_{n+1} & F_n \\ F_n & F_{n-1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}^n$.
Deduceţi identitatea: $F_{n+1}F_{n-1} - F_n^2 = (-1)^n, n \in \mathbb{N}^*$.

2. Fie α un număr real. Demonstraţi că $\forall n \in \mathbb{N}^*$: $|\sin(n\alpha)| \leq n|\sin(\alpha)|$.

3. Demonstraţi că următoarea propoziţie este adevărată $\forall n \in \mathbb{N}, n \geq 14$:
$P(n)$: n se poate scrie ca o sumă de termeni egali doar cu 3 sau 8.

4. Demonstraţi că următoarea propoziţie este adevărată $\forall n \in \mathbb{N}, n \geq 6$:
$P(n)$: orice pătrat se poate împărţi în n pătrate mai mici.

5. Fie $(x_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ un şir de numere din intervalul $[-1, \infty)$ care au acelaşi semn.
Demonstraţi că $\forall n \in \mathbb{N}^*$: $\displaystyle\prod_{i=1}^{n}(1 + x_i) \geq 1 + \sum_{i=1}^{n} x_i$.
Deduceţi inegalitea: $(1 + x)^n \geq 1 + nx$, $x \geq -1$, $n \in \mathbb{N}^*$.

6. Demonstraţi că $\forall n \in \mathbb{N}^*$: $2^{2^n} + 3^{2^n} + 5^{2^n} \equiv 0 (\mathrm{mod}\ 19)$.

7. Demonstraţi că $\forall n \in \mathbb{N}^*$: oricare ar fi $x \geq 0$, avem $\sqrt{x + 1 + \sqrt{x + 2 + \ldots + \sqrt{x + n}}} < x + 2$.
Deduceţi inegalitatea: $\sqrt{1 + \sqrt{2 + \ldots + \sqrt{n}}} < 2, n \in \mathbb{N}^*$.

Bibliografie

[1] T. Andreescu, V. Crişan: *Mathematical Induction: A Powerful and Elegant Method of Proof*, XYZ Press, 2017.

[2] D.S. Gunderson: *Handbook of mathematical induction : theory and applications*, CRC Press, 2011.

[3] L. Panaitopol et al.: *Inducţia matematică*, Editura Gil, 2002.