

Concurs MATE-INFO UBB – 6 aprilie 2019  
Proba scrisă la MATEMATICĂ

**NOTĂ IMPORTANTĂ:**

1) Problemele de tip grilă din Partea A pot avea unul sau mai multe răspunsuri corecte, care trebuie indicate de candidat pe formularul special de pe foaia de concurs. Notarea subiectului de tip grilă se face conform sistemului de punctare parțială din regulamentul concursului.

2) Pentru problemele din Partea B se cer rezolvări complete scrise pe foaia de concurs. Acestea sunt evaluate în detaliu conform baremului.

**PARTEA A**

1. (6 puncte) Fie funcția  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  definită prin  $f(x) = x^2 + 2(a - 1)x + a - 1$ , unde  $a \in \mathbb{R}$ . Ecuația  $f(x) = 0$  nu are nicio soluție reală dacă

- A  $a \in (1, \frac{3}{2})$ ;       B  $a \in (-\infty, 1)$ ;       C  $a \in (0, 1)$ ;       D  $a \in (\frac{3}{2}, 2)$ .

2. (6 puncte) Numărul termenilor raționali ai dezvoltării  $(\sqrt{3} + \sqrt[3]{3})^{19}$  este

- A 3;       B 6;       C 0;       D 2.

3. (6 puncte) Fie sistemul de ecuații cu coeficienți reali

$$\begin{cases} x + ay + z = 1 \\ x + y + az = 1 \\ x + y + z = a. \end{cases}$$

Care dintre următoarele afirmații sunt adevărate?

- A Există un singur  $a \in \mathbb{R}$  astfel încât sistemul să aibă o singură soluție.  
 B Există un singur  $a \in \mathbb{R}$  astfel încât sistemul să aibă mai multe soluții.  
 C Există un singur  $a \in \mathbb{R}$  astfel încât sistemul să fie incompatibil.  
 D Dacă sistemul are o singură soluție, atunci  $y$  nu depinde de  $a$ .

4. (6 puncte) Dacă  $x_1, x_2, x_3 \in \mathbb{C}$  sunt rădăcinile polinomului

$$f = X^3 + 2X^2 + 3X + 4 \in \mathbb{R}[X]$$

și  $a = \frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} + \frac{1}{x_3}$ , atunci

- A  $a = \frac{3}{2}$ ;       B  $a = -2$ ;       C  $a = \frac{4}{3}$ ;       D  $a = -\frac{7}{16}$ .

5. (6 puncte) Limita  $\lim_{x \rightarrow \infty} x(\pi - 2\arctg x)$

- A este egală cu 1;       B este egală cu 2;       C este mai mare decât  $\frac{\pi}{2}$ ;       D nu există.

6. (6 puncte) Fie  $f: \mathbb{R} \setminus \{-1\} \rightarrow \mathbb{R}$  funcția definită prin  $f(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x^n + x}{x^{2n} + 1}$ , unde  $n \in \mathbb{N}$ .

Atunci

- A funcția  $f$  este continuă în 0;
- B funcția  $f$  este continuă în  $-1$ ;
- C limita la stânga a funcției  $f$  în  $-1$  este egală cu 0;
- D funcția  $f$  nu este continuă în 1.

7. (6 puncte) Fie  $f: (-\infty, -1] \cup [1, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$  funcția definită prin  $f(x) = (2x - 7)\sqrt{x^2 - 1}$ .

Atunci

- A  $f$  posedă un singur punct de extrem local;
- B  $f$  posedă trei puncte de extrem local;
- C  $f$  este strict crescătoare pe  $(-\infty, -1]$ ;
- D  $f$  este strict crescătoare pe  $(-\infty, -1] \cup [2, \infty)$ .

8. (6 puncte) Valoarea integralei  $\int_0^{\pi/2} \cos x \cdot \ln(1 + \cos x) dx$  este

- A  $\frac{\pi}{2} - 1$ ;
- B  $\frac{\pi}{2}$ ;
- C  $\frac{\pi}{2} + 1$ ;
- D 0.

9. (6 puncte) Dacă punctul  $A(2, 3)$  este piciorul perpendicularei coborâte din origine pe o dreaptă  $d$ , atunci ecuația dreptei  $d$  este

- A  $2x - 3y + 5 = 0$ ;
- B  $3x - 2y - 17 = 0$ ;
- C  $3x + 2y - 13 = 0$ ;
- D  $2x + 3y - 13 = 0$ .

10. (6 puncte) Mulțimea soluțiilor ecuației  $\sin x + \cos^3 x = \cos x + \sin^3 x$  este

- A  $\{\frac{k\pi}{4} | k \in \mathbb{Z}\}$ ;
- B  $\{\frac{\pi}{2} + k\pi | k \in \mathbb{Z}\} \cup \{\frac{\pi}{4} + k\pi | k \in \mathbb{Z}\}$ ;
- C  $\{\frac{k\pi}{2} | k \in \mathbb{Z}\} \cup \{\frac{\pi}{4} + k\pi | k \in \mathbb{Z}\}$ ;
- D  $\{\frac{k\pi}{2} | k \in \mathbb{Z}\} \cup \{\frac{\pi}{4} + 2k\pi | k \in \mathbb{Z}\}$ .

## PARTEA B

1. (10 puncte) Se consideră inelul  $(\mathbb{Z}[\sqrt{2}], +, \cdot)$ , unde  $\mathbb{Z}[\sqrt{2}] = \{a + b\sqrt{2} | a, b \in \mathbb{Z}\}$ . Pentru orice  $x = a + b\sqrt{2} \in \mathbb{Z}[\sqrt{2}]$ , se notează  $\bar{x} = a - b\sqrt{2}$ . Fie funcția  $f: \mathbb{Z}[\sqrt{2}] \rightarrow \mathbb{Z}$  definită prin  $f(x) = x \cdot \bar{x}$ .

- (a) Să se arate că  $f(x_1 \cdot x_2) = f(x_1) \cdot f(x_2)$  pentru orice  $x_1, x_2 \in \mathbb{Z}[\sqrt{2}]$ .
- (b) Să se arate că dacă  $x \in \mathbb{Z}[\sqrt{2}]$  este inversabil, atunci  $f(x) \in \{-1, 1\}$ .
- (c) Este inelul  $(\mathbb{Z}[\sqrt{2}], +, \cdot)$  corp? Justificare.

2. (10 puncte) Să se determine asimptotele funcției  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  definite prin

$$f(x) = \frac{x^2 - 3x}{\sqrt{x^2 + 1}}.$$

3. (10 puncte) Într-un patrulater convex  $ABCD$  fie  $E$  și  $F$  mijloacele diagonalelor  $[AC]$  și respectiv  $[BD]$ . Dacă  $\overrightarrow{4EF} = \overrightarrow{AD} - \overrightarrow{BC}$ , atunci să se demonstreze că patrulaterul  $ABCD$  este un paralelogram.

**NOTĂ:**

Toate subiectele sunt obligatorii. Se acordă 10 puncte din oficiu.

Timpul efectiv de lucru este de 3,5 ore.

# Răspunsuri și soluții

## PARTEA A

Răspunsuri la probleme:

1.  $\boxed{A} \boxed{D}$ ; 2.  $\boxed{A}$ ; 3.  $\boxed{B} \boxed{D}$ ; 4.  $\boxed{D}$ ; 5.  $\boxed{B} \boxed{C}$ ;  
6.  $\boxed{A} \boxed{C} \boxed{D}$ ; 7.  $\boxed{B} \boxed{C}$ ; 8.  $\boxed{A}$ ; 9.  $\boxed{D}$ ; 10.  $\boxed{C}$ .

Soluții la probleme:

1. Ecuația  $f(x) = 0$  nu are nicio soluție reală  $\Leftrightarrow \Delta = 4(a-1)^2 - 4(a-1) = 4(a-1)(a-2) < 0$   
 $\Leftrightarrow a \in (1, 2)$ .

2. Termenul general al dezvoltării este

$$T_{k+1} = C_{19}^k \sqrt{3}^{19-k} \sqrt[3]{3}^k = C_{19}^k 3^{\frac{19-k}{2}} 3^{\frac{k}{3}}, \quad k \in \{0, \dots, 19\}.$$

Atunci  $T_{k+1}$  este rațional  $\Leftrightarrow k \in \{0, \dots, 19\}$ ,  $3|k$  și  $2|(19-k) \Leftrightarrow k \in \{0, 3, 6, 9, 12, 15, 18\}$  și  $2|(19-k) \Leftrightarrow k \in \{3, 9, 15\}$ . Deci numărul termenilor raționali ai dezvoltării este 3.

3. Notând cu  $A$  matricea sistemului, avem  $\det(A) = (a-1)^2$ . Deci  $\det(A) = 0$  dacă și numai dacă  $a = 1$ . Distingem următoarele două cazuri:

- Dacă  $a = 1$ , atunci sistemul este echivalent cu ecuația  $x + y + z = 1$ , deci are o infinitate de soluții.

- Dacă  $a \neq 1$ , atunci sistemul are o singură soluție. Avem  $\Delta_y = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & a & 1 \end{vmatrix} = -(a-1)^2$ , deci

$$y = \frac{\Delta_y}{\det(A)} = -1 \text{ nu depinde de } a.$$

4. Din relațiile lui Viète,  $x_1 + x_2 + x_3 = -2$ ,  $x_1x_2 + x_1x_3 + x_2x_3 = 3$  și  $x_1x_2x_3 = -4$ . Deci

$$\begin{aligned} a &= \frac{1}{x_1^2} + \frac{1}{x_2^2} + \frac{1}{x_3^2} = \frac{x_2^2x_3^2 + x_1^2x_3^2 + x_1^2x_2^2}{(x_1x_2x_3)^2} \\ &= \frac{(x_1x_2 + x_1x_3 + x_2x_3)^2 - 2x_1^2x_2x_3 - 2x_1x_2^2x_3 - 2x_1x_2x_3^2}{(x_1x_2x_3)^2} \\ &= \frac{(x_1x_2 + x_1x_3 + x_2x_3)^2 - 2x_1x_2x_3(x_1 + x_2 + x_3)}{(x_1x_2x_3)^2} = -\frac{7}{16}. \end{aligned}$$

5. Aplicând regula lui l'Hôpital, avem

$$\lim_{x \rightarrow \infty} x(\pi - 2\arctg x) = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\pi - 2\arctg x}{\frac{1}{x}} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2x^2}{x^2 + 1} = 2.$$

6. Dacă  $x \in (-1, 1)$ , atunci  $\lim_{n \rightarrow \infty} x^n = 0$ , deci  $f(x) = x$ . Evident  $f(1) = 1$ . Dacă  $|x| > 1$ , atunci

$$f(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x^n + x}{x^{2n} + 1} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1 + \frac{x}{x^n}}{1 + \frac{1}{x^{2n}}} = 0.$$

Prin urmare

$$f(x) = \begin{cases} 0, & \text{dacă } x < -1 \\ x, & \text{dacă } -1 < x \leq 1 \\ 0, & \text{dacă } x > 1. \end{cases}$$

7. Funcția  $f$  este continuă pe  $(-\infty, -1] \cup [1, \infty)$  și derivabilă pe  $(-\infty, -1) \cup (1, \infty)$ . Pentru orice  $x \in (-\infty, -1) \cup (1, \infty)$  avem

$$f'(x) = 2\sqrt{x^2 - 1} + \frac{x(2x - 7)}{\sqrt{x^2 - 1}} = \frac{4x^2 - 7x - 2}{\sqrt{x^2 - 1}}.$$

Rădăcinile ecuației  $f'(x) = 0$  sunt  $-1/4$  și  $2$ , iar tabelul care sintetizează variația lui  $f$  este prezentat mai jos.

$x$	$-\infty$		$-1$		$1$		$2$		$+\infty$				
$f'(x)$	+	+	+				-	-	0	+	+	+	
$f(x)$	$\nearrow$	$\nearrow$	$\nearrow$	0			0	$\searrow$	$\searrow$	$-3\sqrt{3}$	$\nearrow$	$\nearrow$	$\nearrow$

Din tabel rezultă că  $-1$  și  $1$  sunt puncte de maxim local pentru  $f$ , în timp ce  $2$  este punct de minim local pentru  $f$ . De asemenea, din tabel rezultă că  $f$  este strict crescătoare pe  $(-\infty, -1]$ , dar nu este strict crescătoare pe  $(-\infty, -1] \cup [2, \infty)$ .

8. Avem

$$\begin{aligned} \int_0^{\pi/2} \cos x \cdot \ln(1 + \cos x) dx &= \int_0^{\pi/2} (\sin x)' \ln(1 + \cos x) dx \\ &= \sin x \ln(1 + \cos x) \Big|_0^{\pi/2} + \int_0^{\pi/2} \frac{\sin^2 x}{1 + \cos x} dx = \int_0^{\pi/2} \frac{1 - \cos^2 x}{1 + \cos x} dx \\ &= \int_0^{\pi/2} (1 - \cos x) dx = (x - \sin x) \Big|_0^{\pi/2} = \frac{\pi}{2} - 1. \end{aligned}$$

9. Panta dreptei  $OA$  este  $m_{OA} = \frac{3}{2}$ , deci panta dreptei  $d$  este  $m_d = \frac{-1}{m_{OA}} = -\frac{2}{3}$ . Astfel ecuația dreptei  $d$  este  $d: y - 3 = -\frac{2}{3}(x - 2)$ , adică  $d: 2x + 3y - 13 = 0$ .

10. *Soluția 1.* Avem:

$$\begin{aligned} \sin x + \cos^3 x = \cos x + \sin^3 x &\Leftrightarrow \cos^3 x - \sin^3 x = \cos x - \sin x \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow (\cos x - \sin x)(\cos^2 x + \cos x \sin x + \sin^2 x) &= \cos x - \sin x \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow (\cos x - \sin x)(1 + \cos x \sin x) &= \cos x - \sin x \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow (\cos x - \sin x) \cos x \sin x &= 0. \end{aligned}$$

*Cazul I.*  $\cos x - \sin x = 0 \Leftrightarrow \cos x = \sin x \Leftrightarrow x \in \{\frac{\pi}{4} + k\pi | k \in \mathbb{Z}\}$ .

*Cazul II.*  $\cos x \sin x = 0 \Leftrightarrow x \in \{\frac{k\pi}{2} | k \in \mathbb{Z}\}$ .

Deci mulțimea soluțiilor este  $M = \{\frac{k\pi}{2} | k \in \mathbb{Z}\} \cup \{\frac{\pi}{4} + k\pi | k \in \mathbb{Z}\}$ .

*Soluția 2.* Avem:

$$\begin{aligned} \sin x + \cos^3 x = \cos x + \sin^3 x &\Leftrightarrow \sin x(1 - \sin^2 x) = \cos x(1 - \cos^2 x) \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow \sin x \cos^2 x = \cos x \sin^2 x &\Leftrightarrow \sin x \cos x (\cos x - \sin x) = 0. \end{aligned}$$

Mulțimea soluțiilor se obține ca mai sus.

## PARTEA B

Soluții la probleme și barem:

1. (a) (3 puncte) Pentru orice  $x_1, x_2 \in \mathbb{Z}[\sqrt{2}]$ , avem

$$f(x_1 \cdot x_2) = (x_1 \cdot x_2) \cdot (\overline{x_1 \cdot x_2}) = (x_1 \cdot x_2) \cdot (\overline{x_1} \cdot \overline{x_2}) = (x_1 \cdot \overline{x_1}) \cdot (x_2 \cdot \overline{x_2}) = f(x_1) \cdot f(x_2),$$

deoarece înmulțirea elementelor din  $\mathbb{Z}[\sqrt{2}]$  este comutativă.

(b) (1 punct) Deoarece  $x \in \mathbb{Z}[\sqrt{2}]$  este inversabil, există  $x' \in \mathbb{Z}[\sqrt{2}]$  astfel ca  $x \cdot x' = 1$ .

(2 puncte) Deci  $f(x) \cdot f(x') = f(x \cdot x') = f(1) = 1$  conform pct. (a).

(1 punct) Deoarece  $f(x) \in \mathbb{Z}$ , rezultă că  $f(x) \in \{-1, 1\}$ .

(c) (3 puncte) De exemplu, fie  $x = 2 + \sqrt{2} \in \mathbb{Z}[\sqrt{2}]$ . Atunci  $x \neq 0$  nu este inversabil conform pct. (b), deoarece  $f(x) = 2 \notin \{-1, 1\}$ . Deci  $(\mathbb{Z}[\sqrt{2}], +, \cdot)$  nu este corp.

2. (0,5 puncte) Deoarece funcția  $f$  este continuă pe  $\mathbb{R}$ , ea nu are asimptote verticale.

(0,5+0,5 puncte) Avem

$$\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = \infty \quad \text{și} \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \infty,$$

deci  $f$  nu are asimptote orizontale.

Avem

$$(1,5 \text{ puncte}) \quad m_1 = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2 \left(1 - \frac{3}{x}\right)}{x^2 \sqrt{1 + \frac{1}{x^2}}} = 1,$$

$$(2 \text{ puncte}) \quad n_1 = \lim_{x \rightarrow \infty} (f(x) - x) = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2 - 3x - x\sqrt{x^2 + 1}}{\sqrt{x^2 + 1}} \\ = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x}{\sqrt{x^2 + 1}} \lim_{x \rightarrow \infty} (x - 3 - \sqrt{x^2 + 1}) \\ = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2 - 6x + 9 - x^2 - 1}{x - 3 + \sqrt{x^2 + 1}} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x \left(-6 + \frac{8}{x}\right)}{x \left(1 - \frac{3}{x} + \sqrt{1 + \frac{1}{x^2}}\right)} = -3.$$

(1 punct) Prin urmare, dreapta  $y = x - 3$  este asimptotă oblică spre  $+\infty$  la graficul lui  $f$ .

De asemenea,

$$(1 \text{ punct}) \quad m_2 = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x^2 \left(1 - \frac{3}{x}\right)}{-x^2 \sqrt{1 + \frac{1}{x^2}}} = -1,$$

$$(2 \text{ puncte}) \quad n_2 = \lim_{x \rightarrow -\infty} (f(x) + x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x^2 - 3x + x\sqrt{x^2 + 1}}{\sqrt{x^2 + 1}} \\ = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x}{\sqrt{x^2 + 1}} \lim_{x \rightarrow -\infty} (x - 3 + \sqrt{x^2 + 1}) \\ = - \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2 - 6x + 9 - x^2 - 1}{x - 3 - \sqrt{x^2 + 1}} = - \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x \left(-6 + \frac{8}{x}\right)}{x \left(1 - \frac{3}{x} + \sqrt{1 + \frac{1}{x^2}}\right)} = 3.$$

(1 punct) Prin urmare, dreapta  $y = -x + 3$  este asimptotă oblică spre  $-\infty$  la graficul lui  $f$ .

**Observație.** Stabilirea existenței asimptotelor oblice urmată de concluzia că  $f$  nu are asimptote orizontale atrage obținerea punctului aferent calculului limitelor lui  $f$  la  $\pm\infty$ .

**3.** Punctul  $F$  este mijlocul segmentului  $[BD]$ , deci  $\overrightarrow{EF} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{EB} + \overrightarrow{ED})$  (**2 puncte**). Analog, punctul  $E$  fiind mijlocul lui  $[AC]$  avem că  $\overrightarrow{BE} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{BC})$  (**2 puncte**) și  $\overrightarrow{DE} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{DA} + \overrightarrow{DC})$  (**2 puncte**).

Astfel

$$\overrightarrow{EF} = \frac{1}{4}(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{CB} + \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{CD}). \quad (\mathbf{1 \text{ punct}})$$

Pe de altă parte conform ipotezei

$$4\overrightarrow{EF} = \overrightarrow{AD} - \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{CB}.$$

Deci  $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{CD} = \vec{0}$  (**1 punct**), adică  $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC}$ , ceea ce înseamnă că patrulaterul  $ABCD$  este paralelogram (**2 puncte**).